

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Ανάλυση

Θεμελιώδη θεωρήματα του απειροστικού λογισμού

Άσκηση 8

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha)$ όπου F είναι μια παράγουσα της f .

Απόδειξη

Από την άσκηση 7 υπάρχει συνάρτηση $g(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $g'(x) = f(x)$.

Επειδή F παράγουσα της f , έχουμε: $F'(x) = f(x)$

Άρα $F'(x) = g'(x) \Leftrightarrow F(x) = g(x) + c$, c σταθερός και $x \in [\alpha, \beta]$

Ξεκινάμε από το δεύτερο μέλος της ζητούμενης σχέσης και έχουμε:

$$F(\beta) - F(\alpha) = g(\beta) + c - (g(\alpha) + c) = g(\beta) - g(\alpha)$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

$$\text{Τελικά } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha)$$