Μαθηματικά Γ'Λυκείου

Ανάλυση

Θεμελιώδη θεωρήματα του ολοκληρωτικού λογισμού

Άσκηση 7

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η συνάρτηση $g(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ με $\alpha\le x\le\beta$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $g'(x)=f(x)$.

Απόδειξη

Αν x, x+h με h>0 (όμοια εργαζόμαστε αν h<0) ανήκουν στο (α,β), τότε

$$g(x+h)-g(x)=\int_{\alpha}^{x+h} f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$$

$$=\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt\right)-\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt=\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$$

Εφόσον $h\neq 0$ έχουμε $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\dfrac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$ (1)

Επειδή η f συνεχής στο $[x,x+h]$, από το θεώρημα των ακραίων τιμών υπάρχουν κ, λ στο διάστημα $[x,x+h]$ ώστε $f(\kappa)=m$ και $f(\lambda)=M$, όπου τα m και M είναι το ολικό ελάχιστο και το ολικό μέγιστο της f στο $[x,x+h]$

.

Από γνωστή ιδιότητα ισχύει $m.h\le\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt\le M.h$

$$\Leftrightarrow h.f(\kappa)\le\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt\le h.f(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow f(\kappa)\le\frac{\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt}{h}\le f(\lambda)$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(\kappa)\le\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\le f(\lambda)\quad(2)$$

Αν $h\to 0^+$, επειδή $x\le\kappa\le x+h$ και $x\le\lambda\le x+h$ θα έχουμε $\kappa\to 0^+$ και $\lambda\to 0^+$.

Εφόσον f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, άρα και στο x θα έχουμε

$\lim\limits_{h\to 0^+} f(\kappa)=\lim\limits_{\kappa\to x^+} f(\kappa)=f(x)$ και

$\lim\limits_{h\to 0^+} f(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to x^+} f(\lambda)=f(x)$

Διδακτική Προσέγγιση

Ζητάμε από τους μαθητές να διαβάσουν την εκφώνηση του θεωρήματος και να προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι είναι αυτό που τους ζητείται να βρουν, ποιες βασικές μαθηματικές έννοιες περιέχονται στα δεδομένα και το ζητούμενο, πως μπορούν να προσεγγίσουν και να ερμηνεύσουν διαφορετικά τα δεδομένα και το ζητούμενο (π.χ. το ορισμένο ολοκλήρωμα ως εμβαδό) και, τέλος, με βάση τη θεωρία των βασικών μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονται, να προσπαθήσουν να τις συνδέσουν μεταξύ τους.

Βασικά σημεία αναφοράς:

Δεδομένα:

- Η f είναι συνεχής στο [α,β] → από τη θεωρία είναι ολοκληρώσιμη

- Η συνάρτηση g δίνεται ως ορισμένο ολοκλήρωμα → γεωμετρικά παριστάνει εμβαδό

Ζητούμενα: να δειχτεί ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] και να βρεθεί ο τύπος της g'.

Διαπραγμάτευση:

Προσπάθεια διαισθητικής προσέγγισης <u>(διαδικασία ανάδρομης πορείας προς τη λύση)</u>

Η g παραγωγίσιμη στο [α,β] → η g παραγωγίσιμη στο τυχαίο αλλά σταθερό x του (α,β) – αφήνοντας ξεχωριστά την παραγωγισιμότητα της g στα άκρα α, β για το τέλος → ορισμός → διαφορά g(x+h)-g(x) →διαφορά εμβαδών → εμβαδό της διαφοράς → νέο ορισμένο ολοκλήρωμα της f → όταν h αρκετά κοντά στο x το μικτόγραμμο εμβαδό που παριστάνει το νέο ολοκλήρωμα προσεγγίζεται από ορθογώνιο με εμβαδό h.f(x) →για την ανάγκη δημιουργίας του λόγου μεταβολής διαίρεση με h (διακρίνω περιπτώσεις h>0, h<0) →ζητούμενο.

Από την (2) και το θεώρημα της παρεμβολής θα έχουμε $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)$.

Όμοια, αν h<0 θα έχουμε $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)$

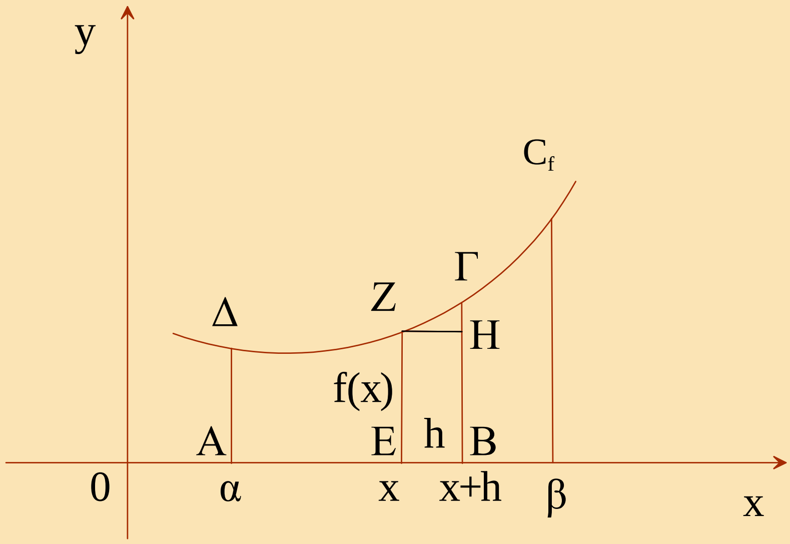
Τελικά $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)\Leftrightarrow g'(x)=f(x)$.

Αν x=α ή x=β τότε πάλι ισχύει το ζητούμενο και οι $g'(\alpha)$, $g'(\beta)$ είναι οι παράγωγοι από τα δεξιά και τα αριστερά της g αντίστοιχα.

Άρα, για τη συνάρτηση $g(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)\,dt$ με $\alpha\le x\le\beta$ αποδείχτηκε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $g'(x)=f(x)$.

Αφορμές για συζήτηση στην τάξη

Παρατηρήστε το σχήμα:



$$E_{\mu\iota\kappa\tau.\ AEZ\Delta}=g(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)\,dt$$

$$E_{\mu\iota\kappa\tau.\ AB\Gamma\Delta}=g(x+h)=\int_{\alpha}^{x+h}f(t)\,dt$$

$$E_{\mu\iota\kappa\tau.\ EB\Gamma Z}=g(x+h)-g(x)=\int_{x}^{x+h}f(t)\,dt$$

$$E_{\mu\iota\kappa\tau.\ EB\Gamma Z}\simeq E_{EBHZ}=f(x).h$$

$$\int_{x}^{x+h}f(t)\,dt\simeq f(x)h$$

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\simeq f(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=f(x)$$