Μαθηματικά Γ'Λυκείου

Ανάλυση

Θεώρημα Rolle

Άσκηση 5

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη τουλάχιστο στο ανοικτό διάστημα (α,β) και ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$

Απόδειξη

Αν η f σταθερή π.χ. f(x)=c με τις προϋποθέσεις του θεωρήματος, τότε το ζητούμενο ξ είναι οποιοσδήποτε αριθμός x στο (α,β), αφού ισχύει $f'(x)=0$

Αν η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση, τότε θα υπάρχει:

- τουλάχιστο ένα $x\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x)>f(\alpha)=f(\beta)$.

Αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα παρουσιάζει μέγιστο σε ένα σημείο κάπου στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή αυτό το σημείο δεν μπορεί να είναι το α ή το β, αφού τότε θα είχαμε $f(\alpha)>f(\alpha)=f(\beta)$ ή $f(\beta)>f(\alpha)=f(\beta)$ πράγμα άτοπο, η συνάρτηση f πρέπει να παίρνει αυτή τη μέγιστη τιμή σε ένα σημείο ξ του (α,β). Έτσι, η f έχει τοπικό μέγιστο στο ξ και επειδή από υπόθεση είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) θα είναι παραγωγίσιμη και στο ξ, άρα από το θεώρημα Fermat θα έχουμε $f'(\xi)=0$

- τουλάχιστο ένα $x\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x)<f(\alpha)=f(\beta)$.

Αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα παρουσιάζει ελάχιστο σε ένα σημείο κάπου στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή αυτό το σημείο δεν μπορεί να είναι το α ή το β, αφού τότε θα είχαμε $f(\alpha)<f(\alpha)=f(\beta)$ ή $f(\beta)<f(\alpha)=f(\beta)$ πράγμα άτοπο, η συνάρτηση f πρέπει να παίρνει αυτή την ελάχιστη τιμή σε ένα σημείο ξ του (α,β). Έτσι, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο ξ και επειδή από υπόθεση είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) θα είναι παραγωγίσιμη και στο ξ, άρα από το θεώρημα Fermat θα έχουμε $f'(\xi)=0$

Διδακτική Προσέγγιση

Ζητάμε από τους μαθητές να διαβάσουν την εκφώνηση του θεωρήματος και να προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι είναι αυτό που τους ζητείται να βρουν, ποιες βασικές μαθηματικές έννοιες περιέχονται στα δεδομένα και το ζητούμενο, πως μπορούν να διατυπώσουν διαφορετικά τα δεδομένα και το ζητούμενο και, τέλος, με βάση τη θεωρία των βασικών μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονται να προσπαθήσουν να τις συνδέσουν μεταξύ τους.

Βασικά σημεία αναφοράς:

Δεδομένα:

- Η f είναι συνεχής στο [α,β] → από τη θεωρία παρουσιάζει ακρότατα (από εδώ και πέρα υπάρχουν δύο επιλογές ή να πάμε ανισοτικά και με τα όρια στην παράγωγο και τελικά στη ζητούμενη σχέση όπως αποδείχθηκε το Θ. Fermat ή να χρησιμοποιήσουμε το Θ.Fermat για να αποδείξουμε το Θ. Rolle)

- Η f παραγωγίσιμη στο (α,β) → f παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του (α,β)

- Ίσες τιμές στα άκρα του [α,β] → η f πιθανόν να είναι σταθερή ή αν δεν είναι τότε θα υπάρχουν x κοντά στο α που θα δίνουν τιμές μεγαλύτερες του f(α) ή και μικρότερες του f(α), οπότε χρειάζεται να διακρίνουμε περιπτώσεις

Ζητούμενα → υπάρχουν όπως είπαμε και παραπάνω δύο επιλογές ή θα χειριστούμε το θεώρημα αυτόνομα, όπως κάναμε και στο θεώρημα Fermat ή θα βασιστούμε στο θεώρημα Fermat οπότε θα πρέπει να εξασφαλίσουμε τις προϋποθέσεις του.

Διαπραγμάτευση:

f σταθερή → προφανής η λύση

f δεν είναι σταθερή → διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές της συνάρτησης για σημεία αρκετά κοντά στο σημείο α → εξασφαλίζουμε τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Fermat → από το συμπέρασμα του θεωρήματος του Fermat προκύπτει το ζητούμενο.