Μαθηματικά Γ'Λυκείου

Ανάλυση

Θεώρημα Fermat

Άσκηση 4

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ που παρουσιάζει σε ένα εσωτερικό σημείο γ του Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο γ. Δείξτε ότι $f'(\gamma)=0$

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο γ (η περίπτωση που η f έχει τοπικό ελάχιστο στο γ είναι παρόμοια).

Τότε θα έχουμε f(γ)≥f(x) για τα x που είναι αρκετά κοντά στο γ, οπότε για x=γ+h όπου h αρκετά κοντά στο 0 θα έχουμε f(γ)≥ f(γ+h) $\Leftrightarrow f(\gamma+h)-f(\gamma)\le 0$.

Με h>0 έχουμε $\dfrac{f(\gamma+h)-f(\gamma)}{h}\le 0$, οπότε

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(\gamma+h)-f(\gamma)}{h}\le \lim_{h\to 0^+}0=0$$

Αλλά υπάρχει η, $f'(\gamma)$ οπότε

$$f'(\gamma)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\gamma+h)-f(\gamma)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(\gamma+h)-f(\gamma)}{h}\le 0 \quad (1)$$

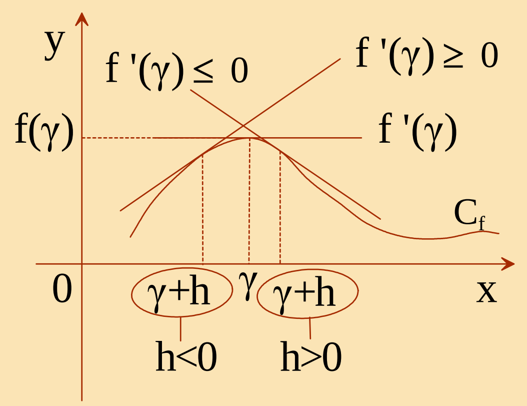
Με h<0 έχουμε $\dfrac{f(\gamma+h)-f(\gamma)}{h}\ge 0$, οπότε

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(\gamma+h)-f(\gamma)}{h}\ge \lim_{h\to 0^-}0=0$$

Αλλά υπάρχει η, $f'(\gamma)$ οπότε

$$f'(\gamma)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\gamma+h)-f(\gamma)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(\gamma+h)-f(\gamma)}{h}\ge 0 \quad (2)$$

Τελικά, από (1) και (2) έχουμε: $f'(\gamma)=0$



Διδακτική Προσέγγιση

Ζητάμε από τους μαθητές να διαβάσουν την εκφώνηση του θεωρήματος και να προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι είναι αυτό που τους ζητείται να βρουν, ποιες βασικές μαθηματικές έννοιες περιέχονται στα δεδομένα και το ζητούμενο, πως μπορούν να διατυπώσουν διαφορετικά τα δεδομένα και το ζητούμενο και, τέλος, με βάση τη θεωρία των βασικών μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονται να προσπαθήσουν να τις συνδέσουν μεταξύ τους.

Βασικά σημεία αναφοράς:

Δεδομένα:

- Η f παρουσιάζει σε εσωτερικό σημείο γ του Δ ακρότατο → υπάρχουν εκατέρωθεν του Δ σημεία που ορίζεται η f και η τιμή της f στο γ είναι ακρότατη τιμή (μέγιστη ή ελάχιστη) σε σχέση με τις άλλες τιμές της σε σημεία αρκετά κοντά στο γ

- Η f παραγωγίσιμη στο σημείο γ → ορισμός παραγώγου → οι παράγωγοι από δεξιά και αριστερά της f στο γ είναι ίσες

Ζητούμενα → μια σχέση ισότητας (από προκύπτουσα ανισότητα – αυτή του ακροτάτου – πρέπει να καταλήξουμε σε ισότητα, πως μπορεί να γίνει αυτό;) → A≥B και A≤B δίνει A=B

Διαπραγμάτευση:

Από την ύπαρξη ακροτάτου στο γ προκύπτει ανισότητα των τιμών της συνάρτησης που ισχύει για εκείνα τα x που είναι αρκετά κοντά στο γ → μετασχηματίζουμε τη σχέση ώστε να περιέχει το h (του τύπου της παραγώγου) που παίρνει τιμές αρκετά κοντά στο 0 → χτίζουμε το λόγο μεταβολής της f διακρίνοντας περιπτώσεις για το h (αφού έχουμε ανισότητα) → πηγαίνουμε σε πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής της f → υπάρχει η παράγωγος της f στο γ → η παράγωγος της f στο γ είναι ίση με την παράγωγο από τα δεξιά και από τα αριστερά της f στο γ → η τομή των δύο ανισοτήτων που τελικά ισχύουν δίνει τη ζητούμενη σχέση.