Μαθηματικά Γ'Λυκείου

Ανάλυση

Άσκηση 3

Δίνεται κυρτή συνάρτηση f ορισμένη στο [-1,3]. Δείξτε ότι για κάθε α, $\beta\in[-1,3]$ ισχύει $f\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)\leq\frac{1}{6}f(\alpha)+\frac{5}{6}f(\beta)$

Απόδειξη

Αν α=β, τότε η ζητούμενη σχέση προφανώς ισχύει σαν ισότητα.

Αν α≠β, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι α<β.

Είναι $\alpha<\frac{\alpha+5\beta}{6}<\beta\Leftrightarrow 6\alpha<\alpha+5\beta<6\beta\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}6\alpha<\alpha+5\beta\\ \alpha+5\beta<6\beta\end{array}\right|\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}5\alpha<5\beta\\ \alpha<\beta\end{array}\right|\Leftrightarrow \alpha<\beta,\text{ που ισχύει}$$

Επομένως το $\frac{\alpha+5\beta}{6}$ είναι εσωτερικό σημείο του [-1,3] και επειδή η f είναι κυρτή από τη θεωρία θα έχουμε:

$$f(\alpha)-f\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)>\left(\alpha-\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)f'\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{6}f(\alpha)-\frac{1}{6}f\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)>\frac{1}{6}\left(\alpha-\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)f'\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)\ (1)\text{ και}$$

$$f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)>\left(\beta-\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)f'\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{6}f(\beta)-\frac{5}{6}f\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)>\frac{5}{6}\left(\beta-\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)f'\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)\ (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{1}{6}f(\alpha)+\frac{5}{6}f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)>$$

$$\left(\frac{\cancel{5\alpha}-\cancel{5\beta}+\cancel{5\beta}-\cancel{5\alpha}}{36}\right)f'\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{6}f(\alpha)+\frac{5}{6}f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)>0.f'\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{6}f(\alpha)+\frac{5}{6}f(\beta)>f\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)<\frac{1}{6}f(\alpha)+\frac{5}{6}f(\beta)$$

Τελικά για κάθε α, $\beta\in[-1,3]$ ισχύει $f\left(\frac{\alpha+5\beta}{6}\right)\leq\frac{1}{6}f(\alpha)+\frac{5}{6}f(\beta)$.

Διδακτική Προσέγγιση

Ζητάμε από τους μαθητές να διαβάσουν την εκφώνηση της άσκησης και να προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι είναι αυτό που τους ζητείται να βρουν, ποια βασική μαθηματική έννοια περιέχει, ποια είναι με δικά τους λόγια (έτσι όπως αυτοί το κατανοούν) η γενική θεωρητική προσέγγιση της έννοιας και πως αυτή η προσέγγιση μπορεί να τους βοηθήσει στη λύση.

Βασικά σημεία αναφοράς:

Δεδομένα → κυρτή συνάρτηση → ανατρέχουμε στη θεωρία και φέρνουμε στο μυαλό μας τον ορισμό και τα βασικά θεωρήματα που συνδέονται με αυτή την έννοια (το θεωρητική πλαίσιο στο οποίο βρισκόμαστε μας βοηθά για την ανάπτυξη της κατάλληλης στρατηγικής που θα οδηγήσει στο ζητούμενο).

Ζητούμενα → η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε →κοιτάζουμε τη μορφή της και προσπαθούμε να βρούμε ομοιότητες και διαφορές σε παραπλήσια θέματα που διαπραγματευτήκαμε ως τώρα

Διαπραγμάτευση:

1ος τρόπος:

Ελέγχουμε πότε ισχύει η ισότητα του ζητούμενου → χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε μια διάταξη για τα α, β π.χ. α<β και αναζητούμε τη διάταξη των α, β, $\frac{\alpha+5\beta}{6}$ → από τη θεωρία η εφαπτομένη σε κάθε σημείο του γραφήματος της f βρίσκεται κάτω από το γράφημα → το ζητούμενο μας δείχνει τον τρόπο που πρέπει να εργαστούμε (δύο ανισότητες, πολλαπλασιασμός με κατάλληλους συντελεστές, πρόσθεση των ανισοτήτων κατά μέλη)

2ος τρόπος: (Μπορείτε να τον προσπαθήσετε)

Η μορφή του ζητούμενου παραπέμπει σε θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[\alpha,\frac{\alpha+5\beta}{6}]$ και $[\frac{\alpha+5\beta}{6},\beta]$ → από τη θεωρία η f κυρτή, άρα η f' γνήσια αύξουσα.