

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Ανάλυση

Άσκηση 2

Δείξτε ότι η εξίσωση $2^x + 5^x = 7^x$ έχει μοναδική λύση

Απόδειξη

Για $x=1$ έχουμε $2^1 + 5^1 = 7^1 \Leftrightarrow 7 = 7$ ισχύει, άρα προφανής λύση η $x=1$.

Έστω $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x - 1$ ορισμένη και

παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x \ln \frac{2}{7} + \left(\frac{5}{7}\right)^x \ln \frac{5}{7} \text{ και}$$

$$\ln \frac{2}{7} < 0 \text{ και } \ln \frac{5}{7} < 0, \text{ οπότε } f'(x) < 0 \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση f γνήσια φθίνουσα στο \mathbb{R} , οπότε η αρχική εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=1$.

Για τη Β' λυκείου

Απόδειξη

Για $x=1$ έχουμε $2^1 + 5^1 = 7^1 \Leftrightarrow 7 = 7$ ισχύει, άρα προφανής λύση η $x=1$.

Έστω ότι έχει και άλλη λύση την $x=p > 1$, τότε

$$\left(\frac{2}{7}\right)^p < \left(\frac{2}{7}\right)^1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^p < \frac{2}{7}, \text{ αφού } \frac{2}{7} < 1$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^p < \left(\frac{5}{7}\right)^1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^p < \frac{5}{7}, \text{ αφού } \frac{5}{7} < 1$$

$$\text{Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: } \left(\frac{2}{7}\right)^p + \left(\frac{5}{7}\right)^p < \frac{2}{7} + \frac{5}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^p + \left(\frac{5}{7}\right)^p < 1 \Leftrightarrow 1 < 1 \text{ άτοπο}$$

Όμοια, αν η εξίσωση έχει και άλλη λύση την $x=\mu < 1$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=1$.

Διδακτική Προσέγγιση

Ζητάμε από τους μαθητές να διαβάσουν την εκφώνηση της άσκησης και να προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι είναι αυτό που τους ζητείται να βρουν, ποια βασική μαθηματική έννοια περιέχει, ποια είναι με δικά τους λόγια (έτσι όπως αυτοί το κατανοούν) η γενική θεωρητική προσέγγιση της έννοιας και πως αυτή η προσέγγιση μπορεί να τους βοηθήσει στη λύση.

Βασικά σημεία αναφοράς:

Δεδομένα \rightarrow η μορφή της εξίσωσης (εκθετική) \rightarrow υποχρεωτικά από αυτήν θα ξεκινήσουμε \rightarrow ελέγχουμε αν η λύση μπορεί να βρεθεί με απλή παρατήρηση και σύντομες δοκιμές (αν δεν είναι προφανής τότε το μυαλό μας πηγαίνει σε θεωρήματα ύπαρξης) \rightarrow προφανής λύση η $x=1$ \rightarrow κοιτάμε με μεγάλη προσοχή τη μορφή της εξίσωσης και σκεφτόμαστε αν μας θυμίζει κάτι και σε καταφατική απάντηση ελέγχουμε αν μπορούμε να εργαστούμε με παρόμοιο τρόπο και τώρα.

Ζητούμενα \rightarrow μοναδικότητα της λύσης $x=1$ \rightarrow ανατρέχουμε στη θεωρία \rightarrow μονοτονία συνάρτησης

Διαπραγμάτευση:

1^{ος} τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x - 1 \rightarrow \text{(και γιατί όχι την}$$

$f(x) = 2^x + 5^x - 7^x$;) \rightarrow δείχνουμε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα \rightarrow κάθε γνήσια μονότονη συνάρτηση τέμνει τον άξονα x 's το πολύ σε ένα σημείο \rightarrow μοναδική λύση η $x=1$.

2^{ος} τρόπος: (την άσκηση μπορούν να διαπραγματευτούν και μαθητές της Β' λυκείου)

Προφανής λύση η $x=1$ \rightarrow έστω ότι έχει και άλλη λύση $p > 1$ ή $p < 1$ \rightarrow θεωρία εκθετικής συνάρτησης \rightarrow άτοπο.