Μαθηματικά Γ'Λυκείου

Ανάλυση

Άσκηση 1

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο [-2,1] και παραγωγίσιμες στο 0 με f(0)=g(0). Αν ισχύει $f(x)+x \le g(x),\ x \in [-2,1]$. Δείξτε ότι $f'(0) = g'(0) - 1$

Απόδειξη

Είναι $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

και $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

Αλλά $f(x)+x \le g(x),\ x \in [-2,1]$

$f(x)+x-f(0) \le g(x)-f(0)$

$f(x)-f(0)+x-0 \le g(x)-g(0)$

Με x>0 έχουμε $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} + 1 \le \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ οπότε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} + 1 \le \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

Τελικά, $f'(0)+1 \le g'(0)$ (1)

Με x<0 έχουμε $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} + 1 \ge \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ οπότε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} + 1 \ge \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

Τελικά, $f'(0)+1 \ge g'(0)$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $f'(0)+1 = g'(0) \Leftrightarrow$

$f'(0) = g'(0) - 1$

Διδακτική Προσέγγιση

Ζητάμε από τους μαθητές να διαβάσουν την εκφώνηση της άσκησης και να προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι είναι αυτό που τους ζητείται να βρουν, ποιες βασικές μαθηματικές έννοιες περιέχονται στα δεδομένα και το ζητούμενο, πως μπορούν να διατυπώσουν διαφορετικά τα δεδομένα και το ζητούμενο και, τέλος, με βάση τη θεωρία των βασικών μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονται στην άσκηση πως συνδέονται αυτές μεταξύ τους.

Βασικά σημεία αναφοράς:

Δεδομένα → f, g παραγωγίσιμες στο 0 (ΠΡΟΣΟΧΗ: όχι σε όλο το πεδίο ορισμού τους, άρα θα εργαστούμε με βάση τον ορισμό της παραγώγου σε σημείο) → κάνοντας μερικά ανάδρομα βήματα στη ζητούμενη σχέση μπορούμε να αντιληφθούμε πως θα χειριστούμε την ανισοτική σχέση που δίνεται.

Ζητούμενα → μια σχέση ισότητας (από δοσμένη ανισότητα πρέπει να καταλήξουμε σε ισότητα, πως μπορεί να γίνει αυτό; → A≥B και A≤B δίνει A=B

Διαπραγμάτευση:

1^{ος} τρόπος:

Θεωρία → παράγωγος στο 0 → μετασχηματισμός της ανισότητας ώστε να εμφανιστούν τα πηλίκα του λόγου μεταβολής → η διαίρεση με ποσότητα της οποίας δεν είναι σταθερό το πρόσημα οδηγεί σε διάκριση περιπτώσεων→ με βάση τη θεωρία από τη δοσμένη ανισοτική σχέση προκύπτει ανισοτική σχέση ορίων→ ορισμός παραγώγου σε σημείο→ ζητούμενο

2^{ος} τρόπος: (Δοκιμάστε να τη λύσετε)

Δίνεται ανισότητα τιμών συνάρτησης (ποια είναι η συνάρτηση;)→ ακρότατα → Θεωρία: Θεώρημα Fermat → παράγωγος της συνάρτησης στο 0 ίση με μηδέν → ζητούμενη σχέση.