

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Ανάλυση

Άσκηση 1

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $[-2,1]$ και παραγωγίσιμες στο 0 με $f(0)=g(0)$. Αν ισχύει $f(x) + x \leq g(x)$, $x \in [-2,1]$. Δείξτε ότι $f'(0) = g'(0) - 1$

Άσκηση 2

Δείξτε ότι η εξίσωση $2^x + 5^x = 7^x$ έχει μοναδική λύση

Άσκηση 3

Δίνεται κυρτή συνάρτηση f ορισμένη στο $[-1,3]$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in [-1,3]$ ισχύει

$$f\left(\frac{\alpha + 5\beta}{6}\right) \leq \frac{1}{6}f(\alpha) + \frac{5}{6}f(\beta)$$

Θεώρημα Fermat

Άσκηση 4

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ που παρουσιάζει σε ένα εσωτερικό σημείο γ του Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο γ . Δείξτε ότι $f'(\gamma) = 0$

Θεώρημα Rolle

Άσκηση 5

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη τουλάχιστο στο ανοικτό διάστημα (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$

Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange)

Άσκηση 6

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη τουλάχιστο στο ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Θεμελιώδη θεωρήματα του απειροστικού λογισμού

Άσκηση 7

εκδόσεις mathbooks
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η συνάρτηση $g(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ με $\alpha \leq x \leq \beta$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $g'(x) = f(x)$.

Άσκηση 8

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha)$ όπου F είναι μια παράγουσα της f .