Γεωμετρία Α' και Β'Λυκείου

Επιπεδομετρία

Άσκηση 1

Θεώρημα Broocart

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, δείξτε ότι υπάρχουν δύο σημεία Ο και Ο' του επιπέδου του τριγώνου ώστε $O\hat{A}B=O\hat{B}\Gamma=O\hat{\Gamma}A$ και $O'\hat{B}A=O'\hat{\Gamma}B=O'\hat{A}\Gamma$.

(Τα δύο αυτά σημεία ονομάζονται σημεία του Broocart)

Άσκηση 2

Θεώρημα M’ kensie

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ο περιγεγραμμένος του κύκλος και ευθεία x'x που τέμνει τις ευθείες των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα. Από τις κορυφές του τριγώνου φέρνουμε τις παράλληλες ΑΗ, ΒΘ, ΓΚ προς την x'x που τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία Η, Θ, Κ. Δείξτε ότι οι ευθείες ΔΗ, ΕΘ και ΖΚ συντρέχουν πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο.

Άσκηση 3

Θεώρημα Visschers

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ<ΒΓ. Αν στο εσωτερικό του τριγώνου θεωρήσουμε σημείο Ρ, δείξτε ότι ΡΑ+ΡΒ+ΡΓ<ΑΓ+ΒΓ

Άσκηση 4

Θεώρημα Carnot

Δείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των ακτίνων της εγγεγραμμένης και της περιγεγραμμένης περιφέρειας είναι ίσο με το άθροισμα των καθέτων που φέρνουμε από το περίκεντρο προς κάθε πλευρά.

Άσκηση 5

Θεώρημα Euler

I) Δείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, το ορθόκεντρο Η, το βαρύκεντρο Θ και το περίκεντρο Ο βρίσκονται στην ίδια ευθεία και ισχύει η σχέση ΗΚ=2ΚΟ.

(Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκονται το περίκεντρο, το βαρύκεντρο και το ορθόκεντρο ονομάζεται ευθεία του Euler)

II) Δείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο, τα μέσα των πλευρών του, τα ίχνη των υψών του και τα μέσα των αποστάσεων των κορυφών από το ορθόκεντρο ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

(Ο κύκλος που ανήκουν τα εννέα αυτά σημεία ονομάζεται κύκλος του Euler)

Άσκηση 6

Θεώρημα Mention

Δείξτε ότι τα κέντρα του εγγεγραμμένου και των παρεγγεγραμμένων σε τρίγωνο κύκλων ορίζουν ανά δύο έξι τμήματα τα μέσα των οποίων ανήκουν στον περιγεγραμμένο κύκλο.

Άσκηση 7

Θεώρημα Salmon

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και τρείς χορδές του ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ. Κατασκευάζουμε με διαμέτρους αυτές τις χορδές τρείς κύκλους οι οποίοι ανά δύο τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Μ. Δείξτε ότι τα τρία αυτά σημεία είναι συνευθειακά.

Άσκηση 8

Θεώρημα Steiner

Κατασκευάζουμε εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΕ και ΓΑΖ. Δείξτε ότι:

ι) ΓΔ=ΑΕ=ΒΖ

ιι) Τα τμήματα ΓΔ, ΑΕ και ΒΖ συντρέχουν σε σημείο Κ που ονομάζεται σημείο Steiner.

ιιι) Φέρνοντας τις ευθείες Αx κάθετη στην ΑΚ, Βy κάθετη στην ΒΚ και Γz κάθετη στην ΓΚ αυτές τεμνόμενες σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

Άσκηση 9

Θεώρημα Miquel

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ πάνω στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα. Δείξτε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι στα τρίγωνα ΑΔΖ, ΒΔΕ και ΓΕΖ περνούν από το ίδιο σημείο.

(Το κοινό σημείο στο οποίο συντρέχουν οι τρείς κύκλοι λέγεται σημείο Miquel)

Άσκηση 10

Θεώρημα Simson

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να βρίσκεται ένα σημείο πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο ενός τριγώνου είναι τα ίχνη των καθέτων από αυτό το σημείο προς τις πλευρές του τριγώνου να βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(Η ευθεία αυτή λέγεται ευθεία Simson)

Άσκηση 11

Θεώρημα Nagel

Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα ίχνη δύο υψών τυχαίου τριγώνου είναι κάθετη στην ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου που αντιστοιχεί στην τρίτη κορυφή.

Άσκηση 12

Θεώρημα Πάππου

Δείξτε ότι το άθροισμα των αποστάσεων των κορυφών ενός τυχαίου τριγώνου από ευθεία που δεν τέμνει το τρίγωνο είναι ίση με το τριπλάσιο της απόστασης του βαρύκεντρου του τριγώνου από αυτή την ευθεία.

Άσκηση 13

Θεώρημα Vecten

Κατασκευάζουμε εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Δείξτε ότι οι ευθείες ΓΔ και ΒΖ τέμνονται πάνω στο ύψος που άγεται από την κορυφή Α του τριγώνου.

Άσκηση 14

Θεώρημα Hamilton

Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΗΓ, ΑΗΒ, ΒΗΓ, όπου Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ, έχουν τον ίδιο κύκλο Euler.

Άσκηση 15

Θεώρημα Taylor

Δείξτε ότι σε τυχαίο τρίγωνο οι προβολές των ιχνών των υψών του πάνω στις άλλες πλευρές του είναι ομοκυκλικά σημεία.

(Ο κύκλος των έξι προβολών λέγεται κύκλος Taylor)

Άσκηση 16

Θεώρημα Πυθαγόρα

Δείξτε ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Άσκηση 17

Θεώρημα Μενελάου

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και μια ευθεία ε που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ του τριγώνου ή τις προεκτάσεις τους στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Δείξτε ότι $\frac{\text{ΕΒ}}{\text{ΕΓ}}\cdot\frac{\text{ΖΓ}}{\text{ΖΑ}}\cdot\frac{\text{ΔΑ}}{\text{ΔΒ}}=1$

Άσκηση 18

Θεώρημα Ceva

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Ο του επιπέδου του. Αν οι ευθείες ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ τέμνουν τις ευθείες ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, δείξτε ότι $\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΔΓ}}\cdot\frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΕΑ}}\cdot\frac{\text{ΖΑ}}{\text{ΖΒ}}=1$

Άσκηση 19

Θεώρημα Πτολεμαίου

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι εγγράψιμο σε κύκλο ένα τετράπλευρο είναι το γινόμενο των διαγωνίων του να είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών του.

Άσκηση 20

Θεώρημα Stewart

Δείξτε ότι σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνοντας τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ ισχύει η σχέση $\mathrm{B\Delta.A\Gamma}^2+\mathrm{\Gamma\Delta.AB}^2=\mathrm{\Gamma B.A\Delta}^2+\mathrm{\Gamma B.\Gamma\Delta.\Delta B}$.

Άσκηση 21

Θεώρημα Leibniz

Δείξτε ότι σε τρίγωνο ΑΒΓ με βαρύκεντρο Θ, παίρνοντας τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου του ισχύει η σχέση $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2+\mathrm{M\Gamma}^2=3\mathrm{M\Theta}^2+\frac{1}{3}\left(\mathrm{AB}^2+\mathrm{B\Gamma}^2+\mathrm{\Gamma A}^2\right)$.