Άλγεβρα Α' Λυκείου

Ρίζες

Άσκηση 4

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{21-6\sqrt{6}}$

Διδακτική Προσέγγιση

Ζητάμε από τους μαθητές να διαβάσουν την εκφώνηση της άσκησης και να προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι είναι αυτό που τους ζητείται να βρουν, ποια βασική μαθηματική έννοια περιέχει, ποια είναι με δικά τους λόγια (έτσι όπως αυτοί το κατανοούν) η γενική θεωρητική προσέγγιση της έννοιας και πως αυτή η προσέγγιση μπορεί να τους βοηθήσει στη λύση.

Βασικά σημεία αναφοράς:

Δεδομένα → η παράσταση Α → προσπαθούμε να πάρουμε όσες περισσότερες πληροφορίες μπορούμε όπως ότι Α>0 → ανατρέχουμε στη θεωρία για να φέρουμε στο μυαλό μας βασικές ιδιότητες των ριζών έτσι, ώστε να μπορέσουμε να τη μετασχηματίσουμε.

Ζητούμενο → να απλοποιηθεί η παράσταση Α μετά από πράξεις.

Διαπραγμάτευση:

$1^{ος}$ τρόπος:

Για να απλοποιηθεί η παράσταση Α θα πρέπει να φύγουν τα εξωτερικά ριζικά →τα υπόριζα πρέπει να είναι τέλεια τετράγωνα →υποχρεωτικά το διπλάσιο γινόμενο της ταυτότητας θα πρέπει να είναι ο όρος με το εσωτερικό ριζικό.

$2^{ος}$ τρόπος:

Είναι Α>0 οπότε υψώνουμε και τα δύο μέλη της παράστασης στο τετράγωνο →κάνουμε πράξεις → επειδή τα υπόριζα δεν είναι συζυγείς παραστάσεις φαίνεται κατά τη διάρκεια της λύσης της άσκησης η δυσκολία της σε σχέση με τον πρώτο τρόπο.

$1^{ος}$ τρόπος

Απόδειξη

Είναι $A=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{21-6\sqrt{6}}$

Για το $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ έχουμε:

$2\sqrt{6}=2.1.\sqrt{6}$

$$\left.\begin{array}{l}1^2=1\\ \sqrt{6}^2=6\end{array}\right\}\oplus:6+1=7\neq 5,\ \text{απορρίπτεται}$$

$2\sqrt{6}=2.\sqrt{2}.\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2}^2=2\\ \sqrt{3}^2=3\end{array}\right\}\oplus:2+3=5,\ \text{δεκτή}$$

Για το $\sqrt{21-6\sqrt{6}}$ έχουμε:

$6\sqrt{6}=2.3.\sqrt{6}$, απορρίπτεται

$6\sqrt{6}=2.3\sqrt{3}.\sqrt{2}$, απορρίπτεται

$6\sqrt{6}=2.3\sqrt{2}.\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{l}\left(3\sqrt{2}\right)^2=18\\ \sqrt{3}^2=3\end{array}\right\}\oplus:18+3=21,\ \text{δεκτή}$$

Άρα $A=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{21-6\sqrt{6}}$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}.$$

2ος τρόπος

$A=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{21-6\sqrt{6}}$

Είναι $\sqrt{21-6\sqrt{6}}<\sqrt{5+2\sqrt{6}}\Leftrightarrow\sqrt{21-6\sqrt{6}}^2<\sqrt{5+2\sqrt{6}}^2\Leftrightarrow$

$21-6\sqrt{6}<5+2\sqrt{6}\Leftrightarrow 16<8\sqrt{6}\Leftrightarrow 16^2<\left(8\sqrt{6}\right)^2\Leftrightarrow 256<384$, που ισχύει

Άρα $A=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{21-6\sqrt{6}}>0$, οπότε $A^2=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{21-6\sqrt{6}}\right)^2 \Leftrightarrow$

$A^2=\sqrt{5+2\sqrt{6}}^{\,2}+\sqrt{21-6\sqrt{6}}^{\,2}-2\sqrt{5+2\sqrt{6}}\sqrt{21-6\sqrt{6}} \Leftrightarrow$

$A^2=5+2\sqrt{6}+21-6\sqrt{6}-2\sqrt{\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(21-6\sqrt{6}\right)} \Leftrightarrow$

$A^2=26-4\sqrt{6}-2\sqrt{33+12\sqrt{6}} \Leftrightarrow A^2=26-4\sqrt{6}-2\sqrt{\left(2\sqrt{6}+3\right)^2}$

$\Leftrightarrow A^2=26-4\sqrt{6}-2\left(2\sqrt{6}+3\right) \Leftrightarrow A^2=26-4\sqrt{6}-4\sqrt{6}-6 \Leftrightarrow A^2=20-8\sqrt{6} \Leftrightarrow$

$A=\sqrt{20-8\sqrt{6}} \Leftrightarrow A=\sqrt{\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)^2} \Leftrightarrow A=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$