Άλγεβρα Α' Λυκείου

Ανισότητες

Άσκηση 3

Για κάθε α,β,γ που ανήκουν στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς, δείξτε ότι

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha\gamma}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\geq\alpha+\beta+\gamma$$

$1^{ος}$ τρόπος

Απόδειξη

Είναι $\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha\gamma}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\geq\alpha+\beta+\gamma\Leftrightarrow$

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha\gamma}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}-\alpha-\beta-\gamma\geq 0\Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha\gamma}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)-2(\alpha+\beta+\gamma)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha\gamma}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}+\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha\gamma}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}-2\alpha-2\beta-2\gamma\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}-2\right)}_{+}+\underbrace{\beta\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}-2\right)}_{+}+\underbrace{\alpha\left(\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}-2\right)}_{+}\geq 0$$

, που ισχύει αφού α,β,γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί και για κάθε θετικό πραγματικό x ισχύει $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

2ος τρόπος

Είναι $\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha\gamma}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\geq\alpha+\beta+\gamma\Leftrightarrow$ [αβγ≠0]

$$\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2\geq\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\alpha\gamma+\gamma^2\alpha\beta\Leftrightarrow$$

$$2\left(\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2\right)\geq 2\left(\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\alpha\gamma+\gamma^2\alpha\beta\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha\beta\right)+\left(\beta^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2+2\beta^2\alpha\gamma\right)+$$

$$\left(\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\beta\gamma\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{(\alpha\gamma+\alpha\beta)^2}_{+}+\underbrace{(\alpha\gamma+\beta\gamma)^2}_{+}+\underbrace{(\beta\gamma+\alpha\beta)^2}_{+}\geq 0$$

,που ισχύει

Διδακτική Προσέγγιση

Βασικά σημεία αναφοράς:

Δεδομένα → τρείς θετικοί πραγματικοί αριθμοί → προσπαθούμε να πάρουμε όσες περισσότερες πληροφορίες μπορούμε από αυτά τα λιτά δεδομένα, όπως ότι είναι διάφοροι του μηδενός, άρα έχουν νόημα τα κλάσματα του ζητούμενου ή ακόμη ότι μπορώ να κάνω απαλοιφή των παρονομαστών χωρίς προβλήματα → ανατρέχω στη θεωρία για να φέρω στο μυαλό μου βασικές ανισοταυτότητες που ισχύουν για θετικούς πραγματικούς αριθμούς και ελέγχω αν κομμάτια απ' αυτές υπάρχουν στο ζητούμενο μετά από κάποιους μετασχηματισμούς → η απλότητα των δεδομένων μας αποτρέπει συνήθως να ξεκινάμε από αυτά για να λύσουμε την άσκηση.

Ζητούμενο → να αποδείξουμε μια ανισοτική σχέση αρκετά πολύπλοκη → η πολυπλοκότητα της σχέσης μας βοηθά για να ξεκινήσουμε από αυτή μιας και έχουμε τη δυνατότητα να κάνουμε πολλές επιλογές για το επόμενο βήμα και περισσότερες απλές πράξεις →η ανισότητα έχει να κάνει με το πρόσημο μιας παράστασης και αυτό με το γινόμενο μέσω παραγοντοποίησης →γενικός σκοπός μας είναι πηγαίνοντας όλους τους όρους του ζητούμενου στο πρώτο μέλος και έχοντας πάντα το δεύτερο μέλος ίσο με μηδέν να φτάσουμε μετά από πράξεις και παραγοντοποιήσεις σε μια ανισοτική σχέση που όλοι οι όροι του πρώτου μέλους της θα έχουν γνωστό πρόσημο και η οποία θα ισχύει.

Διαπραγμάτευση:

$1^{ος}$ τρόπος:

Παρατηρούμε ότι βγάζοντας κοινό παράγοντα από τους δύο από τους τρείς όρους αυτό που μένει μέσα στην παρένθεση είναι άθροισμα θετικών αντίστροφων αριθμών → από γνωστή ανισοταυτότητα το άθροισμα δύο θετικών αντίστροφων αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του δύο → το ζητούμενο είναι συμμετρική παράσταση ως προς α,β,γ με ποιόν τρόπο, λοιπόν, θα μπορούσαμε βγάζοντας κοινούς παράγοντες να εμφανίσουμε όλα τα αθροίσματα των αντιστρόφων → κάνοντας μια δοκιμή στο πρόχειρο αντιλαμβανόμαστε ότι για να γίνει αυτό, λόγω συμμετρίας, χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους και στα δύο μέλη με το δύο → τελικά καταλήγουμε στο πρώτο μέλος σε ένα άθροισμα γινομένων με γνωστό πρόσημο τέτοιο ώστε η ανισοτική σχέση που φτάνουμε να ισχύει πάντα.

$2^{ος}$ τρόπος:

Πηγαίνουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος έχοντας το δεύτερο μέλος μηδέν →διώχνουμε τους παρονομαστές, αφού αβγ≠0 →εμφανίζονται αθροίσματα τετραγώνων που παραπέμπουν στην ταυτότητα του τελείου τετραγώνου → από το διπλάσιο γινόμενο της ταυτότητας καταλαβαίνουμε ότι χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους και στα δύο μέλη με το δύο →συμπληρώνουμε τα τέλεια τετράγωνα που έχουν πάντα θετικό πρόσημο και καταλήγουμε σε κάτι που ισχύει.