Απόλυτες τιμές

Άσκηση 2

Αν $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ και $-1<y<1$ δείξτε ότι $-1<\frac{2x+y}{1+2xy}<1$

Απόδειξη

Είναι

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow |x|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow |x|^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow 1-4x^2<0,$$

$$-1<y<1\Leftrightarrow |y|<1\Leftrightarrow |y|^2<1^2\Leftrightarrow y^2<1\Leftrightarrow y^2-1<0$$

Επίσης

$$\left.\begin{array}{l}-1<y<1\Leftrightarrow |y|<1\\ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow |x|<\frac{1}{2}\end{array}\right\}\ |xy|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<xy<\frac{1}{2},$$

$\Leftrightarrow -1<2xy<1$ και $2xy+1>0$ άρα $1+2xy\neq 0$

Επομένως $-1<\frac{2x+y}{1+2xy}<1\Leftrightarrow \left|\frac{2x+y}{1+2xy}\right|<1\Leftrightarrow$

$$\left|\frac{2x+y}{1+2xy}\right|<1\Leftrightarrow \left|\frac{2x+y}{1+2xy}\right|^2<1^2\Leftrightarrow \left(\frac{2x+y}{1+2xy}\right)^2<1\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2x+y}{1+2xy}\right)^2<1\Leftrightarrow \frac{(2x+y)^2}{(1+2xy)^2}<1\Leftrightarrow$$

$$(2x+y)^2<(1+2xy)^2\Leftrightarrow$$

$$4x^2+y^2+4xy<1+4xy+4x^2y^2\Leftrightarrow$$

$$4x^2+y^2<1+4x^2y^2\Leftrightarrow 4x^2+y^2-1-4x^2y^2<0\Leftrightarrow$$

$$-4x^2\left(y^2-1\right)+y^2-1<0\Leftrightarrow \underbrace{\left(y^2-1\right)}_{-}\underbrace{\left(1-4x^2\right)}_{+}<0$$

,που ισχύει

Διδακτική Προσέγγιση

Ζητάμε από τους μαθητές να διαβάσουν την εκφώνηση της άσκησης και να προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι είναι αυτό που τους ζητείται να βρουν, ποια βασική μαθηματική έννοια περιέχει, ποια είναι με δικά τους λόγια (έτσι όπως αυτοί το κατανοούν) η γενική θεωρητική προσέγγιση της έννοιας και πως αυτή η προσέγγιση μπορεί να τους βοηθήσει στη λύση.

Βασικά σημεία αναφοράς:

Δεδομένα → δύο χαρακτηριστικές αλλά απλές ανισοτικές σχέσεις → κοιτάμε με μεγάλη προσοχή τη μορφή τους και ανατρέχοντας στη θεωρία προσπαθούμε να θυμηθούμε που συναντήσαμε παρόμοιες σχέσεις και πως μπορούμε να τις μετασχηματίσουμε → η απλότητα των δεδομένων μας αποτρέπει να ξεκινήσουμε από αυτές για να λύσουμε την άσκηση αφού θα έπρεπε να δουλέψουμε συνθετικά για να καταλήξουμε στο ζητούμενο, πράγμα αρκετά επίπονο, όχι όμως και ακατόρθωτο τις περισσότερες φορές.

Ζητούμενο → να αποδείξουμε μια ανισοτική σχέση όμοια με τις σχέσεις των δεδομένων αλλά αρκετά πιο πολύπλοκη → η πολυπλοκότητα της σχέσης μας βοηθά για να ξεκινήσουμε από αυτή μιας και έχουμε τη δυνατότητα να κάνουμε περισσότερες απλές πράξεις

Διαπραγμάτευση:

1ος τρόπος:

Οι ποσότητες x, y, $\frac{2x+y}{1+2xy}$ στα δεδομένα και το ζητούμενο ανήκουν σε συμμετρικά ως προς το 0 διαστήματα του άξονα → ψάχνουμε να βρούμε που έχουμε συναντήσει κάτι παρόμοιο στη θεωρία →ιδιότητα απολύτων τιμών → ισοδύναμη διατύπωση της άσκησης → ελέγχουμε ποιον από τους τρόπους απαλλαγής από τα απόλυτα συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε → ύψωση στο τετράγωνο και των δύο μελών του ζητούμενου, πράξεις και χρησιμοποίηση των δεδομένων σχέσεων μέχρι να φτάσουμε σε κάτι που ισχύει.

2ος τρόπος:

Υπάρχει περίπτωση κάποιοι μαθητές να μην αντιληφθούν τον ρόλο που παίζουν τα απόλυτα στην άσκηση και να προσπαθήσουν να την αντιμετωπίσουν ως μια καθαρά ανισοτική άσκηση με απλές σχέσεις στα δεδομένα και πολύπλοκη σχέση στο ζητούμενο.

Ζητούμενο→ διάσπαση της διπλής ανισότητας σε δύο απλές→ γενικά η ανισότητα δηλώνει το πρόσημο μιας ποσότητας και με βάση τον κανόνα των προσήμων το πρόσημο παραπέμπει συνήθως σε γινόμενο → το γινόμενο προϋποθέτει παραγοντοποίηση → οι παράγοντες του γινομένου αποκτούν σταθερό πρόσημο από τα δεδομένα, οπότε και καταλήγουμε σε κάτι που ισχύει.