Άλγεβρα Α’ Λυκείου

Τριγωνομετρία

Άσκηση 1

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x)=9\varepsilon\varphi^2 x+\frac{1}{\varepsilon\varphi^2 x}$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση ορίζεται για εκείνα τα $x\in R$ για το οποία $\varepsilon\varphi x\neq 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x\neq \varepsilon\varphi 0 \Leftrightarrow x\neq \rho\pi, \rho\in\mathbb{Z}$

$1^{ος}$ τρόπος

Είναι $f(x)=9\varepsilon\varphi^2 x+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2 x}=\left(3\varepsilon\varphi x-\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}\right)^2+6$

Άρα $f(x)=\left(3\varepsilon\varphi x-\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}\right)^2+6 \Leftrightarrow$

$\left(3\varepsilon\varphi x-\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}\right)^2=-6+y$

Αλλά $\left(3\varepsilon\varphi x-\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow -6+y\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 6$ με το «ίσον» να ισχύει όταν $3\varepsilon\varphi x-\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\pm\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x=\rho\pi\pm\dfrac{\pi}{6},\ \rho\in\mathbb{Z}$

Επομένως για $x=\rho\pi\pm\dfrac{\pi}{6}, \rho\in\mathbb{Z}$ η f έχει ελάχιστο το 6.

$2^{ος}$ τρόπος

Είναι $f(x)=9\varepsilon\varphi^2 x+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2 x} \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi^2 x.f(x)=9\varepsilon\varphi^4 x+1 \Leftrightarrow 9\varepsilon\varphi^4 x-y.\varepsilon\varphi^2 x+1=0$

Πρέπει $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow y^2-4.9.1\geq 0 \Leftrightarrow y^2\geq 36 \Leftrightarrow |y|\geq 6 \Leftrightarrow$ $y\geq 6$ ή $y\leq -6$ απορρίπτεται, αφού από τον τύπο της f είναι $y>0$. Τελικά $y\geq 6$ με το «ίσον» να ισχύει όταν Δ=0, οπότε το τριώνυμο θα έχει διπλή ρίζα την $\varepsilon\varphi^2 x=-\dfrac{-y}{18} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x=\dfrac{6}{18} \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi^2 x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\pm\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x=\rho\pi\pm\dfrac{\pi}{6},\ \rho\in\mathbb{Z}$.

Διδακτική Προσέγγιση

Ζητάμε από τους μαθητές να διαβάσουν την εκφώνηση της άσκησης και να προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι είναι αυτό που τους ζητείται να βρουν, ποια βασική μαθηματική έννοια περιέχει, ποια είναι με δικά τους λόγια (έτσι όπως αυτοί το κατανοούν) η γενική θεωρητική προσέγγιση της έννοιας και πως αυτή η προσέγγιση μπορεί να τους βοηθήσει στη λύση.

Βασικά σημεία αναφοράς:

Δεδομένα → μόνο ο τύπος της συνάρτησης → υποχρεωτικά από αυτόν θα ξεκινήσουμε → κοιτάμε με μεγάλη προσοχή τη μορφή του και εξετάζουμε αν μας θυμίζει κάτι και σε καταφατική απάντηση ελέγχουμε αν μπορούμε να εργαστούμε με παρόμοιο τρόπο και τώρα (το θεωρητική πλαίσιο στο οποίο βρισκόμαστε μας βοηθά γι’ αυτό τον έλεγχο).

Ζητούμενα → ελάχιστη τιμή συνάρτησης →ανατρέχουμε στη θεωρία

Διαπραγμάτευση:

$1^{ος}$ τρόπος:

Θεωρία → ελάχιστο συνάρτησης → η όποια τιμή της συνάρτησης ***μεγαλύτερη*** από μια συγκεκριμένη τιμή της (αριθμός) → ανισότητα που περιέχει το f(x)=y.

Έλεγχος του τύπου της συνάρτησης → άθροισμα των τετραγώνων → βασική ταυτότητα → το τέλειο τετράγωνο είναι μη αρνητικός αριθμός → καταλήγουμε σε ανισότητα που περιέχει μόνο το y → λύνουμε την ανισότητα καταλήγοντας σε σχέση της μορφής y ≥ κ → ελέγχουμε αν υπάρχει x=λ ώστε f(λ)=κ → για x=λ το κ είναι το ελάχιστο της f.

$2^{ος}$ τρόπος:

Έλεγχος του τύπου της συνάρτησης → άθροισμα που περιέχει αντίστροφες ποσότητες → τριώνυμο → η διακρίνουσά του είναι μη αρνητικός αριθμός → καταλήγουμε σε ανισότητα που περιέχει μόνο το y → λύνουμε την ανισότητα καταλήγοντας σε σχέση της μορφής y ≥ κ → ελέγχουμε αν υπάρχει x=λ ώστε f(λ)=κ → για x=λ το κ είναι το ελάχιστο της f.