Άλγεβρα Α' Λυκείου

[Αρχική σελίδα]

Συναρτήσεις

Άσκηση 5

Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f(x)=x^4+8x^3+24x^2+32x+5$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Απόδειξη

Μονοτονία

Είναι $f(x)=x^4+8x^3+24x^2+32x+5=$
$x^4+8x^3+24x^2+32x+16-16+5=$
$(x+2)^4-16+5=(x+2)^4-11$

Με $x_1<x_2$ έχουμε $x_1+2<x_2+2$

Αν $x_1,x_2\in(-\infty,-2)$, τότε

$$(x_1+2)^4>(x_2+2)^4\Leftrightarrow$$
$$(x_1+2)^4-11>(x_2+2)^4-11\Leftrightarrow$$

$f(x_1)>f(x_2)$. Άρα, η f γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,-2)$

Αν $x_1,x_2\in(-2,+\infty)$, τότε

$$(x_1+2)^4<(x_2+2)^4\Leftrightarrow$$
$$(x_1+2)^4-11<(x_2+2)^4-11\Leftrightarrow$$

$f(x_1)<f(x_2)$. Άρα, η f γνήσια αύξουσα στο $(-2,+\infty)$

Ακρότατα

Είναι $f(x)=(x+2)^4-11\Leftrightarrow(x+2)^4=f(x)+11$, αλλά $(x+2)^4\geq0\Leftrightarrow f(x)+11\geq0\Leftrightarrow y\geq-11$

Το -11 είναι το ελάχιστο της f, αφού υπάρχει $x=-2$ τέτοιο ώστε $f(-2)=-11$.

Διδακτική Προσέγγιση

Ζητάμε από τους μαθητές να διαβάσουν την εκφώνηση της άσκησης και να προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι είναι αυτό που τους ζητείται να βρουν, ποια βασική μαθηματική έννοια περιέχει, ποια είναι με δικά τους λόγια (έτσι όπως αυτοί το κατανοούν) η γενική θεωρητική προσέγγιση της έννοιας και πως αυτή η προσέγγιση μπορεί να τους βοηθήσει στη λύση.

Βασικά σημεία αναφοράς:

Δεδομένα → η συνάρτηση f → πολυωνυμική → ανατρέχουμε στη θεωρία για να φέρουμε στο μυαλό μας βασικές ιδιότητες των πολυωνύμων, ώστε αν χρειαστεί να μπορέσουμε να τη μετασχηματίσουμε.

Ζητούμενο → να εξετάσουμε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα → φέρνουμε στο μυαλό μας τους βασικούς ορισμούς και τα βασικά θεωρητικά κομμάτια που συνδέονται με τη μονοτονία και τα ακρότατα των συναρτήσεων.

Διαπραγμάτευση:

Μονοτονία

Στην Α' Λυκείου δεν υπάρχουν πολλά εργαλεία που θα μπορούσαμε να επικαλεστούμε και να χρησιμοποιήσουμε για να εξετάσουμε μια συνάρτηση ως προς τη μονοτονία. Όσα μαθηματικά εργαλεία υπάρχουν περιστρέφονται γύρω από τον ορισμό της έννοιας. Καταλαβαίνουμε ότι θα πρέπει να ξεκινήσουμε για τυχαίους πραγματικούς χ_1, χ_2 από τη σχέση $\chi_1<\chi_2$ και «χτίζοντας» βήμα – βήμα τον τύπο της συνάρτησης να φτάσουμε σε σχέση της μορφής $f(\chi_1)<f(\chi_2)$ ή $f(\chi_1)>f(\chi_2)$ → ο τύπος της f περιέχει σε περισσότερους από ένας όρους το χ και επιπλέον υπάρχουν όροι που περιέχουν δυνάμεις του χ σε άρτιο μη μηδενικό εκθέτη, οπότε καθίσταται δυσχερές το «χτίσιμο» των τιμών της f στα χ_1, χ_2 χρησιμοποιώντας την ανισοτική σχέση $\chi_1<\chi_2$ →οδηγούμαστε στη λύση του μετασχηματισμού του τύπου της f ώστε να περιέχει, αν είναι δυνατόν, ένα μόνο όρο με δύναμη του χ →η f ως πολυωνυμική συνάρτηση μας οδηγεί στις ταυτότητες→ο τύπος της f περιέχει όρους του αναπτύγματος $(\chi+2)^4=\ldots$ →$f(\chi)=(x+2)^4-11$ → υπάρχει δύναμη με άρτιο εκθέτη στον τύπο της f, οπότε ο μηδενισμός της βάσης της δύναμης καθορίζει τα διαστήματα ελέγχου της μονοτονίας

Ακρότατα

Στην Α' Λυκείου τα μαθηματικά εργαλεία που υπάρχουν για να διαπραγματευτούμε θέματα ακροτάτων περιστρέφονται γύρω από τον ορισμό της έννοιας →απομονώνουμε στο ένα μέλος όλους τους όρους της f που περιέχουν το χ. Αν αυτό το μέλος είναι μόνιμα θετικό ή αρνητικό καταλήγουμε σε ανισοτική σχέση που περιέχει το $f(\chi)=\psi$ → τελικά παίρνουμε $\psi\geq\alpha$ ή $\psi\leq\alpha$ →αν υπάρχει χ_0 ώστε $f(\chi_0)=\alpha$, τότε το α είναι το ελάχιστο ή το μέγιστο της συνάρτησης.